

進化ゲームの位相図分析序説

— 3×3 ゲーム —

Towards the Phase Diagram Analysis of 3×3 Evolutionary Games

森 本 好 則

Members of a single large homogeneous population are supposed to repeatedly encounter one another at random, and play a symmetric two-person game. Optimal response being adopted in the process of natural selection, the system is expected to move to some evolutionary equilibrium (E.E.). The purpose of this paper is to show a systematic way of analyzing various types of E.E. and the movement of the system, using the phase diagram.

In sections 2 and 3, it is shown that the critical properties of the dynamic system of evolutionary game do not depend on the *values* of payoff, but solely on the *sign patterns* of “zero-diagonalized” payoff matrices, in 2×2 games (Proposition 1) and also in 3×3 games (Proposition 2). In section 4, the method of orthogonal transformation of variables and the rotation of the Cartesian coordinates are introduced to make use of the phase diagram analysis of the dynamic process. In section 5, examples from the most typical cases, those of ellipse and hyperbola, are illustrated.

Yoshinori Morimoto

JEL : C72

キーワード : 進化ゲーム、位相図分析、進化的均衡、等利得曲線、利得行列の符号パターン、 3×3 ゲーム

Key words : evolutionary game, phase diagram analysis, evolutionary equilibrium, equi-payoff curve, sign pattern of payoff matrices, 3×3 game

1 はじめに

本稿では、多数の同質の生物から構成される単一の集団の内部における戦略の自然淘汰の問題を取りあげる。集団内で、ある生物が他の生物と 1 対 1 で任意に繰り返し遭遇した場合に、一方のとり最善の戦略が他方のとり戦略に依存して決まるような状況下で最終的に成立する動学的に安定的な均衡状態を「進化的均衡」(evolutionary equilibrium)¹⁾と呼ぶ。本稿は、このような進化的均衡のさまざまなタイプを、位相図を用いて統一的な手法で分析しようとする試みである。

そのときどきの集団の中で戦略 i をとる構成員の比率を p_i , $\sum_i p_i = 1$ とするとき、任意の初期状態から出発した場合に、 p_i はどのような動きを示し、最終的にどのような進化的均衡の構成比率 p_i^* に落ち着くのか。第 2 節では、分析の基礎的な準備として 2×2 進化ゲームの場合を取りあげて、利得行列を変換(「ゼロ対角化」)して得られる符号パターンが、進化的均衡の所在およびその安定性に一意的にかかわっていることを示す(命題 1)。第 3 節では、これをさらに拡張して、同様に 3×3 ゲームの場合にも、「ゼロ対角化」された利得行列の符号パターンが、ゲームの動学的な特性を決定することを述べる(命題 2)。第 4 節では、 3×3 ゲームの動学体系の位相図において、等利得曲線と $\dot{p}_i = 0$ 曲線がどのような形状をとるかということを、直交変換を用いて一般的に分析するとともに、座標の回転によってこの位相図を具体的に作図する方法を説明する。第 5 節では、等利得曲線および $\dot{p}_i = 0$ 曲線が楕円のケースと双曲線のケースについて、位相図による分析をそれぞれ例示する。

2 利得行列の符号パターンと進化的均衡 (1)

— 2×2 ゲームの場合 —

本稿は 3×3 進化ゲームの位相図分析を目的としているが、そのための準備として、まず本節では、 2×2 進化ゲームの動学的特性と利得行列の符号パターンの対応関係について述べる。

1) Taylor and Jonker (1978, p.146), Hirshleifer and Coll (1988, p.368), Hirshleifer and Riley (1992, p.335).

2×2 ゲームの利得行列を構成する 4 つの要素（数値）は序数的選好順序をあらわすものとする²⁾。序数的順序を仮定するかぎり、あらゆる利得行列は単調増加変換によって、たとえば (1,2,3,4) という要素から成る行列に還元することが可能である。

Zeeman (1981, pp.255-256) は、さらに、行プレーヤーの利得行列の各列ごとに（列プレーヤーの場合は各行ごとに）適当な定数を差し引くことによって、利得行列の対角要素をゼロにするという単純化を行っている。一般に ($n \times n$ ゲームにおいて)、これによって各プレーヤーの最適反応は変化せず、したがって、均衡の存在と安定性が影響を受けることはない。以下、この単純化を「ゼロ対角化」(zero-diagonalization) と呼ぶことにする。この手法を用いると、囚人のジレンマなどの場合には、原ゲームのもつ特殊な性質が見失われるというデメリットが生じ得るけれども、他方において、さまざまな均衡と利得の位相との間の関係をきわめて簡潔な形で表現することが可能となるので、以下の分析では（とくに 3×3 ゲームの場合には）、この単純化が必要不可欠である。

ここで、ゼロ対角化の手法をさらに一歩進めて、次の命題を提示する。

命題 1 2×2 進化ゲーム³⁾ の位相図における動学的特性（均衡の所在と種別、および、その動学的安定性）は、ゼロ対角化された利得行列の符号のパターン⁴⁾のみに依存し、行列の要素の値には依存しない。

証明

ゼロ対角化された利得行列を

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

とする⁴⁾。以下、第 1 の戦略を戦略 α 、第 2 の戦略を戦略 β と呼び、集団の中

2) Rapoport and Guyer (1966), 森本 (2002), (2008) ではこの方法がとられている。

3) 3×3 進化ゲームについても、同様な命題が成立する（次節参照）。

4) 進化ゲームの利得行列はプレーヤーに関して対称的である（一方のプレーヤーの利得行列の転置行列が他方のプレーヤーの利得行列になっている）から、以下、表示の簡略化のために、もっぱら行プレーヤーの利得行列のみを示す。

で戦略 α をプレーする構成員の比率を p , 戦略 β をプレーする構成員の比率を $1-p$ とする。このとき、プレーヤーのそのときどきの期待利得は、

$$V = p(1-p)(b+c)$$

であり、プレーヤーは、最大の期待利得 $\max(V_\alpha, V_\beta)$ すなわち、

$$V_\alpha \equiv (1-p)b$$

あるいは

$$V_\beta \equiv cp$$

を求めて、最適戦略を選択しようとするから、動学体系⁵⁾は、

$$\frac{dp}{dt} = \kappa(V_\alpha - V)p, \quad (\kappa > 0)$$

あるいは

$$\frac{d(1-p)}{dt} = \kappa(V_\beta - V)(1-p), \quad (\kappa > 0)$$

と定式化される。2 × 2 進化モデルの場合には、これら 2 つの動学体系は同値である⁶⁾。

[I ①a] まず、 $b > 0$, $c < 0$ のケースを考える⁷⁾。

$$V_\alpha - V = (1-p)[b - p(b+c)] > 0$$

すなわち

$$p(b+c) < b$$

のとき、 b, c を任意の $b' > 0$, $c' < 0$ で置き換えても

$$p(b' + c') < b', \quad (0 < p < 1)$$

が成立するから、 $V_\alpha - V > 0$ の符号は保存される。このケースでは、 $p = 1$ (すなわち戦略 α) が進化的均衡 (EE) である。

[I ①b] $b = 0$, $c < 0$ のケースも、[I ①a] と同様である。このケース

5) Taylor & Jonker (1978, p.149), Zeeman (1981, p.255), Maynard Smith (1982, (2.2)) 式および (D.3) 式, Hirshleifer & Riley (1992, pp.337,341) ほか参照。

6) 森本 (2008, p.42 脚注 6) 参照。

7) 以下の 5 つのケース分けは、森本 (2008) の分類にもとづいている。

も、 $p = 1$ （すなわち戦略 α ）が EE である。

[I ②] $b < 0, c < 0$ のケースでは、

$$V_\alpha - V = (1 - p)[b - p(b + c)] \geq 0$$

すなわち

$$p \geq \frac{b}{b + c}, \quad \left(0 < \frac{b}{b + c} < 1\right)$$

において、 b, c を任意の負数 b', c' で置き換えても、

$$0 < \frac{b'}{b' + c'} < 1$$

が成立するから、

$$p \geq \frac{b'}{b' + c'}$$

となるような p , ($0 < p < 1$) が存在する。すなわち、混合戦略⁸⁾NE（ナッシュ均衡）の値は $b/(b + c)$ から $b'/(b' + c')$ に変化するが、この新しい均衡に関して $V_\alpha - V \geq 0$ の符号が保存されて、

$$1 > p > \frac{b'}{b' + c'} \quad \text{のとき} \quad V_\alpha - V > 0,$$

$$0 < p < \frac{b'}{b' + c'} \quad \text{のとき} \quad V_\alpha - V < 0$$

という動学的な位相は変化しないのである。

このケースの EE は、 $p = 0$ と $p = 1$ （すなわち戦略 α と戦略 β ）であり、混合戦略 NE の $b/(b + c)$ は動学的に不安定であることがわかる。

[II ①] $b > 0, c = 0$ のケースの証明は、[I ①a] の場合と同様であり、このケースの EE は $p = 1$ （すなわち戦略 α ）である。

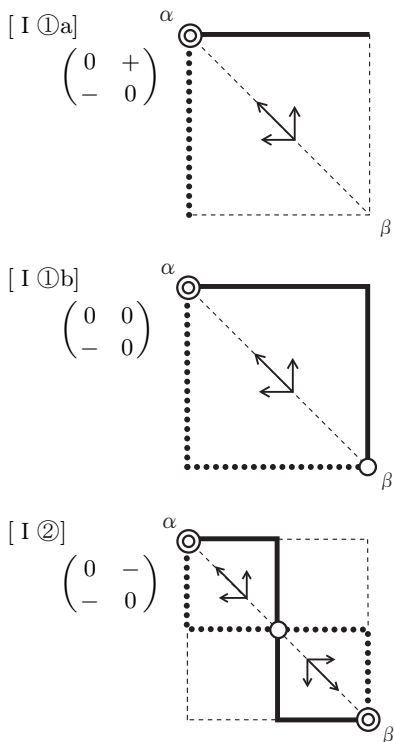
[II ②] $b > 0, c > 0$ のケースは、[I ②] の場合と同様な仕方で証明できる。このケースでは、混合戦略 NE の $b/(b + c)$ が安定的であり、EE となる。

利得表での戦略の順序の入れ替え（行および列の入れ替え）によって生じる同一ゲームの重複を除くと、ゼロ対角化されたすべての 2×2 進化ゲームは、以上の 5 つの符号パターンのいずれかに帰着する。 (証了)

8) ここでいう「混合戦略」とは、集団の中の一定割合 p と $1 - p$ の構成員が、それぞれ純粋戦略 α と β をプレーしている状況のことである。

次に、直観的な理解のために、上掲の 5 つの範疇の進化ゲームを要約的に図示する (図 1)。

利得行列の + (または -) は、任意の正 (または負) の数値をあらわしている。図中の太い実線は利得行列における行プレイヤーの (混合戦略を含む) 最適反応曲線のイメージであり、太い点線は同様に列プレイヤーの最適反応曲線のイメージである。両曲線の交点 (○印) がナッシュ均衡 (NE) であり、◎印が進化的均衡 (EE) である⁹⁾。



9) メイナード・スミス (1976), (1982) の「進化的に安定的な戦略」(Evolutionarily Stable Strategy) と EE の関係については、森本 (2008, 第 3~4 節) 参照。

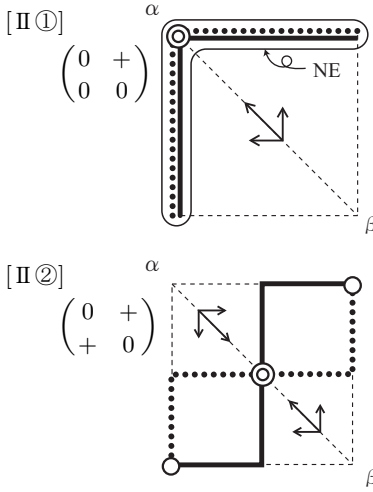


図 1

ここでの進化ゲームは、同一の集団に属する構成員が相互に遭遇してプレーするゲームであり、行プレーヤーと列プレーヤーは同一集団内のすべての構成員であるから、集団としては必ず同一の戦略がプレーされることになる¹⁰⁾。その結果、そのときどきに成立している状態は、常に、(混合戦略を含む) 利得表の主対角線上の 1 点で与えられ、非対角のナッシュ均衡は意味をもたない。

したがって、上掲の 5 つのタイプの 2×2 進化モデルのそれぞれの動学的な特性は、より簡略化して、図中の主対角線のみを取り出すことによって、線分上の動きとして示すことができる。この場合、[I ①a], [I ①b], [II ①] の 3 つのケースはいずれも、単一の純粋戦略 EE へ向かう動きを示すから、これを 1 つに合わせると、すべての 2×2 進化モデルは、図 2 のように、3 つの範疇にまとめることができる¹¹⁾。

10) 複数の集団の間での相互作用を考えた場合の「行動の共進化」(岡田 (2008, p.254)) は、ここでは考察から除外されている。

11) Weibull (1995, pp. 28-30, 74-76) は、非対角要素をゼロにするという「正規化」(normalization) を通じて、図 2 に相当する結果を導いている。

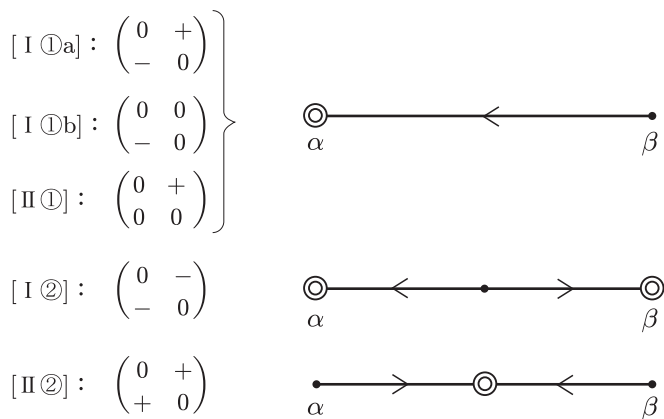


図 2

3 利得行列の符号パターンと進化的均衡 (2)

— 3×3 ゲームの場合 —

次に、 3×3 進化ゲームを取りあげる。 2×2 進化ゲームの場合と同様に、序数的な利得を仮定し、次のような「ゼロ対角化」された利得行列（行プレーヤーの場合）を考える。3つの戦略を、戦略 α ，戦略 β ，戦略 γ と呼び、それぞれの戦略をプレーする構成員の比率を $p, q, r, (p + q + r = 1)$ とする。

$$\begin{pmatrix} 0 & b & d \\ c & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

2×2 進化モデルの場合と並行的に、 3×3 進化モデルについても次の命題が成立する。

命題 2 3×3 進化モデルの位相図における動学的な特性は、ゼロ対角化された利得行列の符号のパターンのみに依存し、行列の要素の値には依存しない。

証明

図形を用いた直観的な証明を述べる。前節で 2×2 進化モデルの動学的な特性が線分上で表現できることを述べたが、 3×3 進化モデルの場合には、通

常行われている 2 等辺直角 3 角形を用いた表現が便利である¹²⁾。

直角 3 角形 (図 3) の直交する 2 等辺の長さをそれぞれ 1 として、横軸 (底辺) に p , 縦軸 (垂直な辺) に q を測る。すなわち、 γ を原点として、点 P の座標が (p, q) であり、このとき、点 P から斜辺まで水平 (あるいは垂直) に延長した線分の長さが $r = 1 - p - q$ を与える。したがって、 3×3 進化モデルにおける自然淘汰のプロセスは、この 2 等辺直角 3 角形上の点 P の動きとして表現できる。3 角形の 3 つの頂点 α, β, γ はそれぞれ、 $p = 1, q = 1, r = 1$ の点であり、3 つの純粋戦略に対応している。

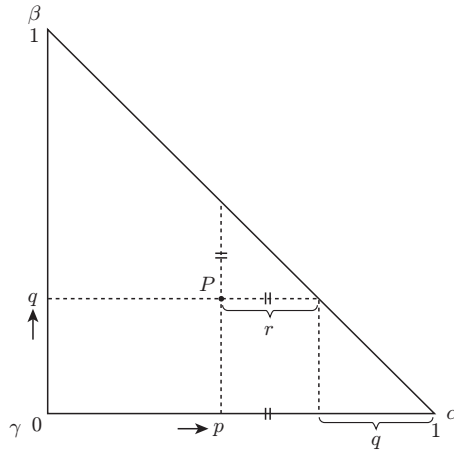


図 3

いま、前出の「ゼロ対角化」された 3×3 利得行列

$$\begin{pmatrix} 0 & b & d \\ c & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

12) Machina (1982, pp.305-306), Sugden (1987, pp. 3-4), Hirschleifer and Riley (1992, p.339), Weibull (1995, pp. 3-5). この 2 等辺直角 3 角形は、3 次元の単位単体を真上から (r 軸の方向から) 見たものであり、また、Malinvaud (1985, p.331) の正 3 角形の座標を変換したものであると考えることができる。

において、 $r = 1 - p - q = 0$ の場合を考えると、利得行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

となって、進化ゲームは前節の 2×2 進化ゲームに退化し、この 2×2 ゲームの（混合戦略を含む）利得表の主対角線の線分が、図 3 の 2 等辺直角 3 角形の斜辺 $\beta\alpha$ となる。同様に、 $p = 0$ の場合には、利得行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ h & 0 \end{pmatrix}$$

となり、この 2×2 ゲームの（混合戦略を含む）利得表の主対角線の線分が、図 3 の直角 3 角形の辺 $\beta\gamma$ となる。また、 $q = 0$ の場合には利得行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ g & 0 \end{pmatrix}$$

となり、この利得表の主対角線の線分が、図 3 の直角 3 角形の底辺 $\gamma\alpha$ となる。

したがって、図 3 の 2 等辺直角 3 角形の 3 辺上での p, q の変化の方向は、前節の図 2 を用いて特定できることになる。すなわち、さきの（ゼロ対角化された） 3×3 利得行列の要素 b と c の符号が直角 3 角形の辺 $\beta\alpha$ 上での p, q の動きを決定し、要素 f と h の符号が辺 $\beta\gamma$ 上での p, q の動きを決定し、要素 d と g の符号が辺 $\gamma\alpha$ 上での p, q の動きを決定するのである。さらに、直角 3 角形の内部での p, q の動きは、このような 3 辺上での p, q の動きの組み合わせによって与えられるが、前節で示したように、利得行列の要素の値が変化しても、その符号が変わらないかぎり、直角 3 角形の 3 辺上での p, q の動きのパターンは不変にとどまるから、直角 3 角形内部の動学的な位相もまた不変にとどまる。（証す）

たとえば、ゼロ対角化された 3×3 利得行列の符号が、

$$\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$$

であるなら、直角 3 角形の 3 辺上での p, q の動きは図 4 の矢印の通りであり、したがって、直角 3 角形内部での p, q の動きは、破線の矢印のようになる。他

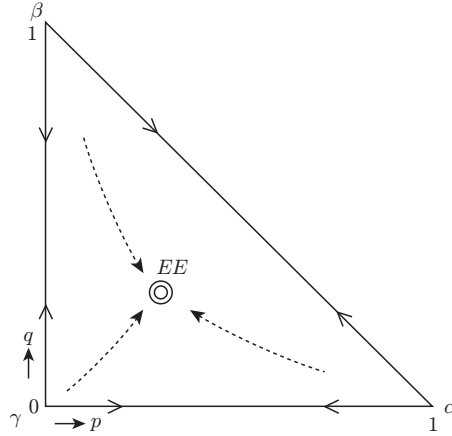


図 4

の符号パターンについても、同様に示すことができる。

しかし、この直角 3 角形上における均衡の所在と p, q の動きをより厳密に調べるためには、等利得曲線と、最適反応をあらわす $\dot{p} = 0$ 曲線、 $\dot{q} = 0$ 曲線を用いた位相図分析が必要である。そこで次節では、これらの曲線の形状について考察する。

4 等利得曲線と $\dot{p} = 0$ 曲線、 $\dot{q} = 0$ 曲線の形状

— 直交変換と座標の回転 —

等利得曲線 (equ-payoff curve) は、そのときどきの利得 V が一定となるような (p, q) の組み合わせの軌跡である。さきの 3×3 利得行列の場合には、

$$\begin{aligned}
 V &\equiv p(qb + rd) + q(pc + rf) + r(pg + qh) \\
 &= -(d + g)p^2 + (b - d - f + c - g - h)pq - (f + h)q^2 \\
 &\quad + (d + g)p + (f + h)q \\
 &= \text{const.}
 \end{aligned} \tag{1}$$

と定義される。

\dot{p} 曲線と \dot{q} 曲線は、 3×3 進化モデルのの動学体系

$$\dot{p} = \kappa p(V_\alpha - V), \quad \text{ただし} \quad V_\alpha \equiv qb + rd \quad (2)$$

$$\dot{q} = \kappa q(V_\beta - V), \quad \text{ただし} \quad V_\beta \equiv pc + rf \quad (3)$$

($\kappa > 0$) より、それぞれ、

$$\begin{aligned} V_\alpha - V &= qb + (1 - p - q)d - V \\ &= (d + g)p^2 - (b - d - f + c - g - h)pq + (f + h)q^2 \\ &\quad - (2d + g)p - (b - d + f + h)q + d \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V_\beta - V &= pc + (1 - p - q)f - V \\ &= (d + g)p^2 - (b - d - f + c - g - h)pq + (f + h)q^2 \\ &\quad - (c - f + d + g)p - (2f + h)q + f \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

4.1 直交変換と標準化

3 つの曲線 (1), (4), (5) 式は、いずれも 2 変数 p, q に関する 2 次方程式であるが、このままの形では、これらの 2 次方程式があらわす 2 次曲線（円錐曲線）—— 一般に、円、楕円、双曲線、あるいは放物線 —— の具体的な形状は必ずしも判然としないので、変数の直交変換（orthogonal transformation）によって、これを標準形の方程式になおしておこう¹³⁾。

表記の単純化のために、2 変数の 2 次方程式を

$$V = up^2 + vpq + wq^2 + lp + mq \quad (6)$$

とあらわすことにする。まず、2 次の項

13) 第 4 節の内容の数学的な背景については、2 変数の 2 次方程式（および 2 次曲線）と 2 次形式に関するテキストブック参照。

$$\begin{aligned}
 & up^2 + vpq + wq^2 \\
 &= up^2 + 2kpq + wq^2 \\
 &= (p, q)A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } A \equiv \begin{pmatrix} u & k \\ k & w \end{pmatrix}, \quad k \equiv v/2
 \end{aligned}$$

について、この対称 2 次形式の行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とし、これらの固有値に属する固有ベクトルから成る直交行列を Ψ とする。 Ψ の転置行列 Ψ^T は、 $\Psi^T = \Psi^{-1}$ である。 Ψ による直交変換を、

$$(p', q') = (p, q)\Psi$$

すなわち

$$(p, q) = (p', q')\Psi^T$$

において、さきの 2 次形式を標準形になおすと、

$$\begin{aligned}
 (p, q)A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= (p', q')\Psi^T A \Psi \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} \\
 &= (p', q')\Lambda \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} \\
 &= \lambda_1 p'^2 + \lambda_2 q'^2
 \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $\Lambda \equiv \Psi^T A \Psi$ は λ_1, λ_2 を対角要素とする対角行列である。

p, q の 1 次の項について同様な変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}
 lp + mq &= (l, m) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\
 &= (l, m)\Psi \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となるから、2 次方程式 (6) は、

$$\begin{aligned}
 V &= (p, q)A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + lp + mq \\
 &= (p', q')\Lambda \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} + (l, m)\Psi \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} \\
 &= \lambda_1 p'^2 + \lambda_2 q'^2 + l' p' + m' q' \tag{7}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $(l', m') = (l, m)\Psi$ である。

ここで、

$$\lambda_1 \lambda_2 = \begin{vmatrix} u & k \\ k & w \end{vmatrix} = uw - k^2 \neq 0$$

のとき¹⁴⁾、座標を平行移動することによって、(7) 式はさらに、

$$V = \lambda_1(p' + s)^2 + \lambda_2(q' + t)^2 - n$$

すなわち

$$\lambda_1 P^2 + \lambda_2 Q^2 = n' \quad (8)$$

とあらわすことができる。ただし、

$$\begin{aligned} s &= l'/(2\lambda_1), & t &= m'/(2\lambda_2), & n &= \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2, \\ P &= p' + s, & Q &= q' + t, & n' &= V + n \end{aligned}$$

である。(8) 式は、 $\lambda_1 n' > 0$ 、かつ $\lambda_2 n' > 0$ のとき楕円となり、 $n' \neq 0$ で $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ のとき双曲線となる¹⁵⁾。

4.2 変数変換と座標の回転

前節では、2 次方程式 (6) の標準化を通じて、それがどのような図形をあらわすかということを一般的な形で説明したが、本節では、それらの図形を作図するための具体的な手順に重点をおいて考える。

p, q の 2 次方程式

$$V = up^2 + vpq + wq^2 + lp + mq \quad (6)$$

を原点のまわりに角 θ だけ回転した時の方程式が、

$$V = u'p'^2 + v'p'q' + w'q'^2 + l'p' + m'q' \quad (9)$$

とあらわされるとき、変数 (p, q) と (p', q') の間には

14) 次註参照。

15) $\lambda_1 n' < 0$ 、かつ $\lambda_2 n' < 0$ のときは、あらわす図形がない。また、 $n' = 0$ のときは、交わる 2 直線、または原点をあらわす。

なお、 $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ の場合は、(8) 式は放物線（さもなければ平行な 2 直線、重なる 2 直線、または図形なし）となる。

$$(p', q') = (p, q) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$(p, q) = (p', q') \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

という 1 次変換の関係が存在する。

(9) 式の 2 次の項の係数 u', v', w' は、(6) 式の 2 次の項に、(10) 式

$$p = p' \cos \theta + q' \sin \theta,$$

$$q = -p' \sin \theta + q' \cos \theta$$

を代入したときに得られる $p'^2, p'q', q'^2$ の係数であるから、

$$u' = u \cos^2 \theta - v \sin \theta \cos \theta + w \sin^2 \theta \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v' &= 2u \sin \theta \cos \theta + v(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2w \sin \theta \cos \theta \\ &= 2(u - w) \sin \theta \cos \theta + v(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

$$w' = u \sin^2 \theta + v \sin \theta \cos \theta + w \cos^2 \theta \quad (13)$$

となる。直交変換による標準化のもとでは $v' = 0$ でなければならないから、どのような場合にそうなるかを考えると、 $\cos \theta = 0$ なら $v' = -v \sin^2 \theta = -v$ となるから、 $v' = 0$ が成立するのは、 $\cos \theta \neq 0$ で、

$$2(u - w) \sin \theta \cos \theta + v(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

の場合である。両辺を $\cos^2 \theta$ で割って移項すると、

$$v \tan^2 \theta - 2(u - w) \tan \theta - v = 0 \quad (14)$$

となり、これを $\tan \theta$ の 2 次方程式とみると、判別式は $4(u - w)^2 + 4v^2 > 0$ であるから、(14) 式は 2 つの実数解をもつ。そのいずれか 1 つを $\tan \theta$ とすると、このような θ について、(9) 式の v' がゼロになる。

(9) 式の 1 次の項の係数は、同様に (6) 式の 1 次の項に (10) 式を代入して得られる p', q' の係数であり、

$$l' = l \cos \theta - m \sin \theta \quad (15)$$

$$m' = l \sin \theta + m \cos \theta \quad (16)$$

となる。

このような標準化の手続きを経て求めた

$$V = u'p'^2 + w'q'^2 + l'p' + m'q' \quad (17)^{16)}$$

の図形を、原点のまわりに角 $-\theta$ だけ回転する（逆方向に戻す）と、もとの 2 次方程式 (6) の図形が得られる。

5 位相図分析——楕円と双曲線の事例

3 × 3 進化ゲームの最も典型的な位相図のパターンは、等利得曲線が楕円のケースと双曲線のケースであるが、本節では、それぞれのケースから 1 例を示しておこう。第 3 節（命題 2）で述べたように、位相のパターン（動学的な特性）はもっぱら、「ゼロ対角化」された利得行列の要素の符号に依存するから、以下、単純化のために、利得行列の正の要素はすべて +1、負の要素はすべて -1 とおく¹⁷⁾。

5.1 等利得曲線が楕円の事例

次のような（ゼロ対角化された）利得行列をもつ進化ゲームの例を考える。

$$\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$$

この場合の 2 等辺直角 3 角形の 3 辺上での p, q の動きは、さきの図 4 の通りである。

利得行列の要素の絶対値をすべて 1 とおいた場合、この進化ゲームの期待利得は、

$$\begin{aligned} V &= p[q + (1 - p - q)] + q[p + (1 - p - q)] + (1 - p - q)(p + q) \\ &= -2(p^2 + q^2 + pq - p - q) \end{aligned}$$

16) この式が、さきの (7) 式である。したがって、 $u' = \lambda_1$, $w' = \lambda_2$ である。

17) 利得行列の要素の値が変化すると、等利得曲線および \dot{p} 曲線、 \dot{q} 曲線の位置や形状に偏りや歪みが生じ得るが、要素の符号が同一にとどまるかぎり、これらの曲線の基本的な形状や相対的な位置関係は変化しない。

であり、したがって等利得曲線は

$$V = -2(p^2 + q^2 + pq - p - q) = \text{const.} \quad (18)$$

となる。混合戦略均衡 NE (内点) は、 $V_\alpha = V_\beta = V_\gamma$ すなわち

$$q + (1 - p - q) = p + (1 - p - q) = p + q$$

より、

$$p = q = 1 - p - q = 1/3$$

となり、この混合戦略 NE における利得の値は、 $V = 2/3$ である。また、純粋戦略のもとでは、 $p = 1$, $q = 1$, $1 - p - q = 1$ のとき、利得の値はいずれも $V = 0$ となる。

以下、位相図を用いることによって、 p, q の動きを、より厳密な形で分析する。

まず、等利得曲線の形状を求める。 pq の項の係数がゼロになるための条件 [(14) 式]

$$v \tan^2 \theta - 2(u - w) \tan \theta - v = 0$$

に $v = u = w = 1$ を代入すると、 $\tan \theta = \pm 1$ を得る。 $\tan \theta = 1$ をとると、 $\theta = 45^\circ$ となり、したがって、 $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$, $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$ となるから、(11), (13) 式より

$$u' = u \cos^2 \theta - v \sin \theta \cos \theta + w \sin^2 \theta = 1/2 - 1/2 + 1/2 = 1/2$$

$$w' = u \sin^2 \theta + v \sin \theta \cos \theta + w \cos^2 \theta = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$$

が得られる。

次に、 p, q の 1 次の項の係数は、(15), (16) 式より、

$$l' = l \cos \theta - m \sin \theta = -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = 0$$

$$m' = l \sin \theta + m \cos \theta = -1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = -2/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

となる。

(17) 式にこれらの値を代入すると、

$$-V/2 = u'p'^2 + w'q'^2 + l'p' + m'q' = (1/2)p'^2 + (3/2)q'^2 - \sqrt{2}q'$$

すなわち、

$$p'^2 + 3(q' - \sqrt{2}/3)^2 = 2/3 - V \quad (19)$$

が得られる。

この (19) 式は、縦軸の $\sqrt{2}/3$ に中心をもつ楕円群であり (ただし $V < 2/3$)、この楕円を原点のまわりに -45° だけ回転したものが、(18) 式の等利得曲線である (図 5)。

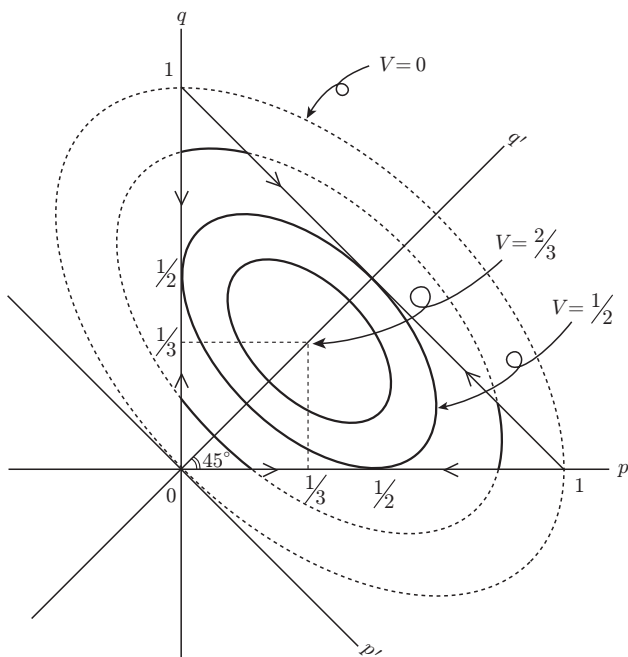


図 5

次に、動学体系 (2), (3) 式から、 $\dot{p} = 0$ 曲線と $\dot{q} = 0$ 曲線を求める。

$\dot{p} = 0$ 曲線は、(2) 式より、

$$\begin{aligned}
V_\alpha - V &= q + (1 - p - q) + 2(p^2 + q^2 + pq - p - q) \\
&= 2(p^2 + q^2 + pq) - 3p - 2q + 1 = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

である。この式は $p = q = 1/3$ のとき成立するから、 $\dot{p} = 0$ 曲線は、混合戦略 NE = $(1/3, 1/3, 1/3)$ を通ることがわかる。

(20) 式について、標準化のための座標の回転を考えると、(20) 式の p, q の 2 次項は等利得曲線 (18) 式の場合と同一であるから、 $\theta = 45^\circ$, $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$, $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$ であり、 $u' = 1/2$, $w' = 3/2$ となる。また、 p, q の 1 次項の係数は、

$$\begin{aligned}
l' &= -3/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2} = -1/\sqrt{2} \\
m' &= -3/\sqrt{2} - 2/\sqrt{2} = -5/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

となるから、(20) 式は、

$$\begin{aligned}
&2[(1/2)p'^2 + (3/2)q'^2] - (1/\sqrt{2})p' - (5/\sqrt{2})q' + 1 \\
&= [p' - (1/(2\sqrt{2}))]^2 + 3[q' - (5/(6\sqrt{2}))]^2 - 1/6 = 0
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{(p' - 0.3536)^2}{(0.4083)^2} + \frac{(q' - 0.5893)^2}{(0.2357)^2} = 1$$

と書き換えられる。この楕円を原点のまわりに -45° だけ回転したものが、 $\dot{p} = 0$ 曲線である (図 6)¹⁸⁾。

$\dot{q} = 0$ 曲線は、(3) 式より、

$$\begin{aligned}
V_\beta - V &= p + (1 - p - q) + 2(p^2 + q^2 + pq - p - q) \\
&= 2(p^2 + q^2 + pq) - 2p - 3q + 1 = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

となる。(14) 式の解として $\tan \theta = -1$ をとると、 $\theta = -45^\circ$, $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$,

18) なお、 $\dot{p} = 0$ 曲線上のいくつかの点の座標と勾配は次の通りである。

$p :$	1/3	1/2	1/2	5/6	1
$q :$	1/3	0	1/2	-1/6	0
$dq/dp :$	∞	-1	0	0	∞

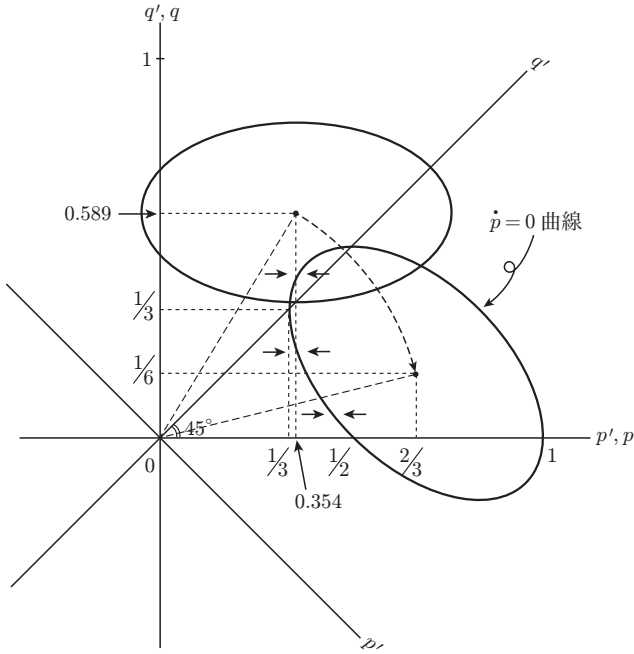


図 6

$\sin \theta = -1/\sqrt{2}$ であり、 $u' = 3/2$, $w' = 1/2$, $l' = -5/\sqrt{2}$, $m' = -1/\sqrt{2}$ となるが、これは、ちょうど (20) 式の $\dot{p} = 0$ 曲線の p と q を入れ替えた形となっており、この場合の $\dot{q} = 0$ 曲線は、 45° 線に関して $\dot{p} = 0$ 曲線と対称的である。したがって、(21) 式の標準形は、

$$\frac{(p' - 0.5893)^2}{(0.2357)^2} + \frac{(q' - 0.3536)^2}{(0.4083)^2} = 1$$

となり、この楕円を原点のまわりに 45° だけ回転したものが、 $\dot{q} = 0$ 曲線である。

図 7 は、これらの曲線を 2 等辺直角 3 角形上に描いて、(2), (3) 式の動学体系を位相図にあらわしたものである。図 7 から知られるように、この進化モデルでは、混合戦略 NE(1/3, 1/3, 1/3) が EE (進化的均衡) である。また、斜

辺 $\beta\alpha$ 上の混合戦略 $NE(1/2, 1/2, 0)$ は鞍点であり、斜辺 $\beta\alpha$ に沿って均衡に近づくなら（そして、その場合のみ）、解経路は安定的であることがわかる。

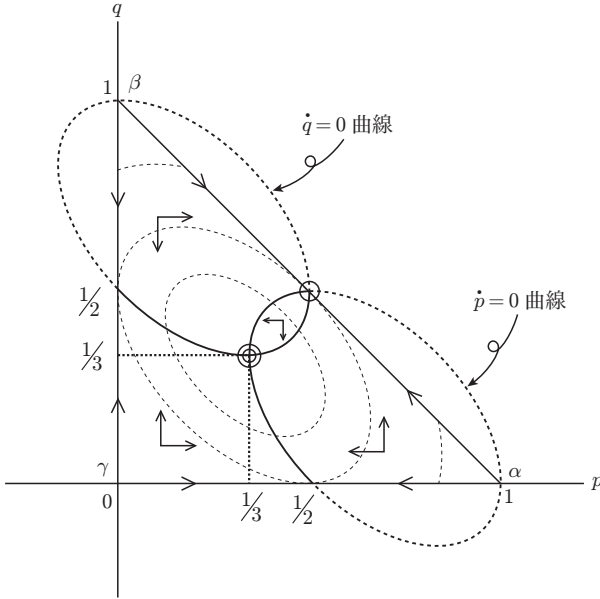


図 7

なお、利得行列の要素の正負を逆にした場合に得られる

$$\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$$

という符号パターンの進化モデルでは、前出の数式の符号がすべて正負逆となるので、図 5～図 7 の図形はそのまま、利得 V の符号と変数 p, q の変化の方向だけが逆転する（図 8）。したがって、この進化モデルでは、純粋戦略 NE （直角 3 角形の頂点） α, β, γ が EE （進化的均衡）となり、斜辺 $\beta\alpha$ 上の混合戦略 $NE(1/2, 1/2, 0)$ は、さきのモデルと同様に鞍点となる¹⁹⁾。

19) 図 8 の斜辺 $\beta\alpha$ 上の混合戦略 NE は、この点を通る 45° 線に沿って左下方から近づくなら（そして、その場合にのみ）、解経路は安定的である。

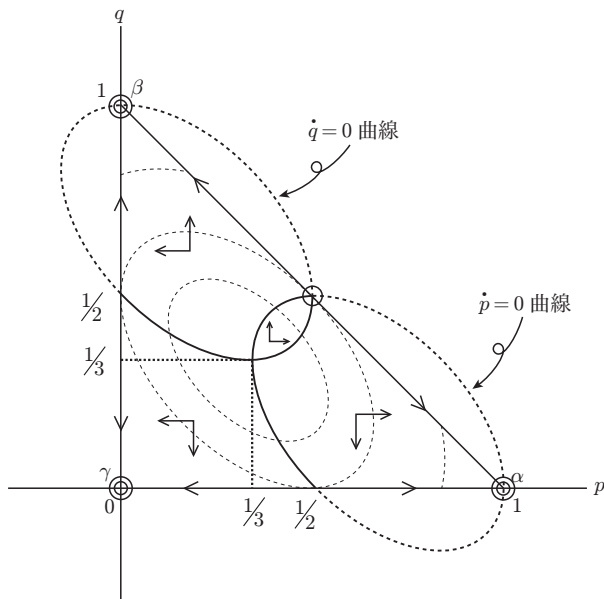


図 8

5.2 等利得曲線が双曲線の事例

本節では、次のような符号パターンの（ゼロ対角化された）利得行列の例を取りあげる。

$$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ + & 0 & + \\ - & + & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、単純化のために、すべての要素の絶対値をそれぞれ 1 とおく。

この進化モデルを 2 等辺直角 3 角形図で表示した場合の \dot{p}, \dot{q} の動きは、後出の図 10 の 3 角形の 3 辺に示されている矢印の通りである。この場合、可能な均衡としては、辺 $\beta\alpha$ 上の $(1/2, 1/2, 0)$ 、辺 $\beta\alpha$ 上の $(0, 1/2, 1/2)$ という 2 つの混合戦略 NE に加えて、 $(1/5, 3/5, 1/5)$ という内点の混合戦略 NE が考えられるが、 p, q の動きを厳密に明らかにするためには、位相図によ

る分析が必要である。

まず、等利得曲線については、

$$\begin{aligned} V &= p[q - (1 - p - q)] + q[p + (1 - p - q)] + (1 - p - q)(-p + q) \\ &= 2(p^2 - q^2 + pq - p + q) = \text{const.} \end{aligned} \quad (22)$$

の標準形を求めると、(14) 式より $\tan \theta = 2 \pm \sqrt{20}/2$ となつて、

$$(p' + 0.5380)^2 - (q' - 0.3325)^2 = \text{const.}$$

が得られる。この直角双曲線を原点のまわりに $\theta = -76.72^\circ$ だけ回転したものが、(22) 式である (図 9)。この直角双曲線群の中心は、 (p', q') 座標では $(-0.54, 0.33)$ であり、 (p, q) 座標では、 $(1/5, 3/5)$ すなわち混合戦略 NE である。V の値は、この中心 (混合戦略 NE) では $2/5$ 、直角 3 角形の 3 辺の中点 (等利得曲線との接点) では $\pm 1/2$ 、3 つの頂点では 0 で、中心から左右へ遠ざかるほど、また上下から中心へ近づくほど、V の値は大きくなる (図中の矢印 \Rightarrow は利得の上昇の方向をあらわす)。

次に、 $\dot{p} = 0$ 曲線は、

$$\begin{aligned} V_\alpha - V &= q - (1 - p - q) - 2(p^2 - q^2 + pq - p + q) \\ &= -2(p^2 - q^2 + pq) + 3p - 1 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

であり、これを標準化すると、

$$\frac{(p' + 0.1541)^2}{(0.2115)^2} - \frac{(q' - 0.6529)^2}{(0.2115)^2} = 1$$

となる。この直角双曲線を原点のまわりに $\theta = -76.72^\circ$ だけ回転したものが、 $\dot{p} = 0$ 曲線である²⁰⁾。

$\dot{q} = 0$ 曲線は、

20) $\dot{p} = 0$ 曲線上のいくつかの点の座標と勾配は次の通りである。

$p :$	0	1/5	1/2	;	1/5	1/2	1
$q :$	$1/\sqrt{2}$	3/5	1/2	;	$-2/5$	0	0
$dq/dp :$	-0.56	-1/2	0	;	3/2	1	-1/2

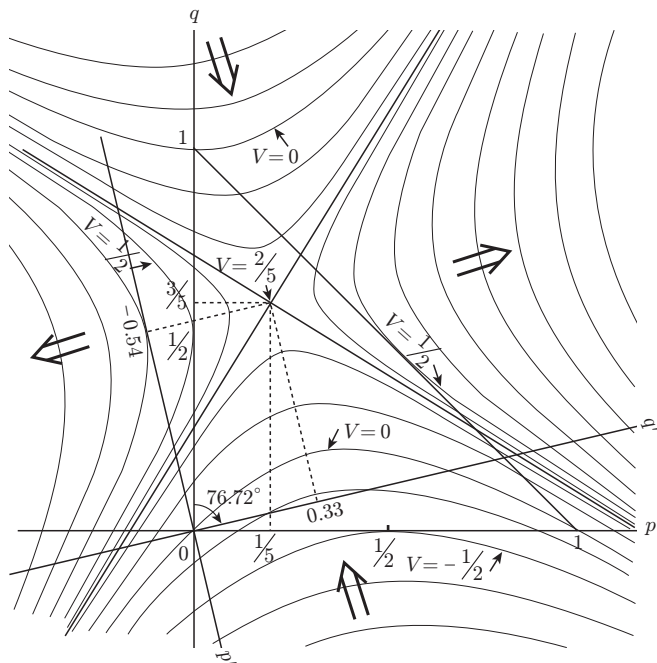


图 9

$$\begin{aligned} V_\beta - V &= p + (1 - p - q) - 2(p^2 + q^2 + pq - p + q) \\ &= -2(p^2 - q^2 + pq) + 2p - 3q + 1 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

を標準化すると、

$$\frac{(p' + 0.7556)^2}{(0.2114)^2} - \frac{(q' - 0.2811)^2}{(0.2114)^2} = 1$$

となり、この直角双曲線を原点のまわりに $\theta = -76.72^\circ$ だけ回転したものが、 $\dot{q} = 0$ 曲線となる²¹⁾。

21) $\dot{q} = 0$ 曲線上のいくつかの点の座標と勾配は次の通りである。

$$\begin{array}{llll} p: & 0 & 1/5 & 1/2 \quad ; \quad 0 \quad 1/5 \quad 1/2 \\ q: & 1/2 & 3/5 & 1/2 \quad ; \quad 1 \quad 11/10 \quad 3/2 \\ dq/dp: & 1 & 0 & -1/2 \quad ; \quad 0 \quad 1 \quad 3/2 \end{array}$$

図 10 は、以上の分析にもとづいて位相図を描いたものである。図から知られるように斜辺 $\beta\alpha$ 上の NE(1/2, 1/2, 0) と、辺 $\beta\gamma$ 上の NE(0, 1/2, 1/2) が、EE であり、内点の混合戦略 NE(1/5, 3/5, 1/5) は鞍点である²²⁾。

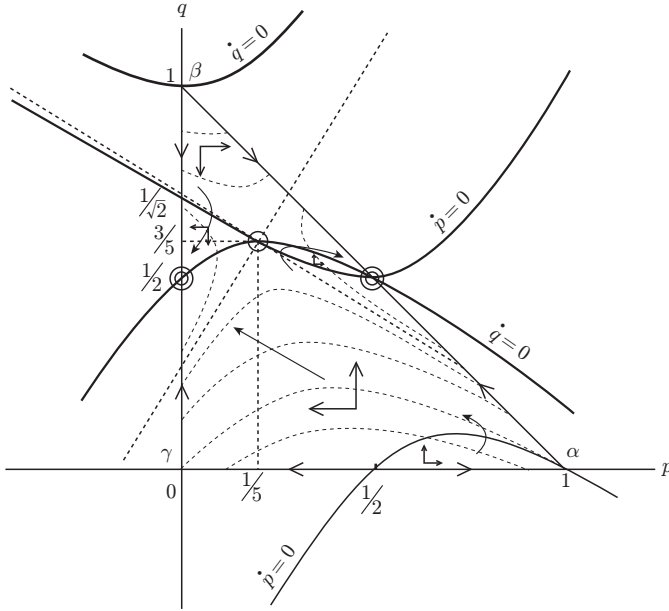


図 10

なお、さきの利得行列の要素の符号を正負逆にした場合には、

$$\begin{pmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & - \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$$

22) このことは、 $(p^*, q^*) = (1/5, 3/5)$ の近傍で動学方程式 (2), (3) を線形化した場合の特性方程式が、

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

となることから確かめられる。この場合、均衡点 (p^*, q^*) の近傍で初期条件 (p_0, q_0) が $(q_0 - q^*)/(p_0 - p^*) = -1$ を満たすなら（そして、その場合にのみ）、解経路は安定的である。

という符号パターンが得られるが、この場合には、図形はそのまま、数式の正負の符号と、位相図における変数の変化の方向がすべて逆転する（図 11）。その結果、頂点 β の NE(0, 1, 0) と、辺 $\gamma\alpha$ 上の NE(1/2, 0, 1/2) が EE となり、内点の混合戦略 NE(1/5, 3/5, 1/5) は、さきのモデルと同様に鞍点である²³⁾。

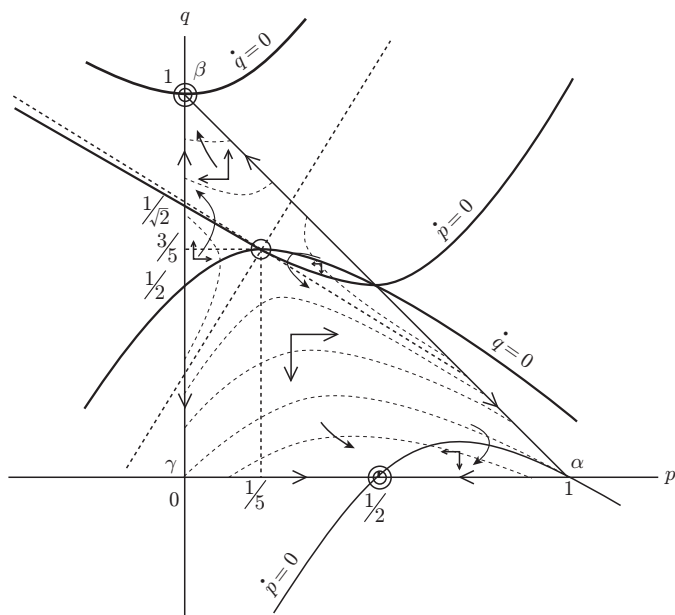


图 11

23) 均衡点 $(p^*, q^*) = (1/5, 3/5)$ の近傍で動学方程式 (2), (3) を線形化すると、特性方程式は

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

となり、これより、初期条件が $(q_0 - q^*)/(p_0 - p^*) = 0$ を満たす（すなわち、水平方向から均衡点に近づく）場合に（そして、その場合にのみ）、解経路が安定的であることが導かれる。

引用文献

- Hirshleifer, J., and Coll, J.C.M. (1988), “What Strategies Can Support the Evolutionary Emergence of Cooperation?,” *Journal of Conflict Resolution*, Vol. 32, No. 2, June, pp.367-398. [Reprinted in J. Hirshleifer, *The Dark Side of the Force*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.]
- Hirshleifer, J., and Riley, J.G. (1992), *The Analytics of Uncertainty and Information*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Laffont, J.-J. (1989), *The Economics of Uncertainty and Information*, (translated by J.P. Bonin and H. Bonin), MIT Press, Massachusetts.
- Machina, M.J. (1982), “‘Expected Utility’ Analysis Without the Independence Axiom,” *Econometrica*, Vol. 50, No. 2, March, pp.277-325.
- Malinvaud, E. (1985), *Lectures on Microeconomic Theory* (translated by A. Silvey), Revised ed., North Holland, Amsterdam. [林 敏彦訳『ミクロ経済理論講義』創文社, 1981.]
- Maynard Smith, J. (1976), “Evolution and the Theory of Games,” *American Scientist*, Vol. 64, January-February, pp. 41-45.
- Maynard Smith, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press.[寺本 英・梯 正之訳『進化とゲームの理論—闘争の論理』産業図書, 1985.]
- Maynard Smith, J., and Price, G.R. (1973), “The Logic of Animal Conflict,” *Nature*, Vol. 246, November, pp. 15-18.
- 岡田 章 (2008), 『ゲーム理論入門—人間社会の理解のために』有斐閣.
- 森本好則 (2002), 「混合戦略と利得の位相— 2×2 ゲーム」, 『経済学論究』(関西学院大学), 56 巻 2 号, 7 月, 45-72 頁.
- 森本好則 (2008), 「進化モデルと利得の位相— 2×2 ゲーム」, 『経済学論究』(関西学院大学), 62 巻 3 号, 12 月, 31-48 頁.
- Rapoport, A., and Guyer, M. (1966), “A Taxonomy of 2×2 Games,” *General Systems*, Vol. 11, pp. 203-214.
- Sugden, R. (1987), “New Developments in the Theory of Choice Under Uncertainty,” *Surveys in the Economics of Uncertainty*, ed. by J.D. Hey and P.J. Lambert, Blackwell, Oxford, pp. 1-24.
- Taylor, P.D., and Jonker, L.B. (1978), “Evolutionarily Stable Strategies and Game Dynamics,” *Mathematical Biosciences*, Vol. 40, pp. 145-156.
- Weibull, J.W. (1995), *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, Massachusetts. [大和瀬達二監訳『進化ゲームの理論』オフィス カノウチ, 1998.]
- Zeeman, E.C. (1981), “Dynamics of the Evolution of Animal Conflicts,” *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 89, pp. 249-270.